

数学“101计划”之分析学



“101计划”核心教材  
数学领域

# 数学分析（上册）

楼红卫 杨家忠 梅加强 编著

中国教育出版传媒集团  
高等教育出版社



“101 计划”核心教材  
数学领域

数学“101计划”之分析学

# 数学分析（上册）

楼红卫 杨家忠 梅加强 编著

中国教育出版传媒集团  
高等教育出版社·北京

## 内容提要

本教材根据“101 计划”的要求编写。教材的编写基于编者多年的教学经验以及与兄弟院校教师的交流，兼顾了先进性与一定的普适性，注重基础性、思想性以及学科间的融会贯通，精选了例题和习题。

全书共二十一章，包含集合与映射、实数、序列极限、函数极限、连续函数、导数与微分、微分中值定理、不定积分、Riemann 积分、广义积分、数项级数、函数序列与函数项级数、幂级数、多元函数与映射的极限与连续、多元函数微分学及其应用、多元函数的积分学、曲线积分与曲面积分、微分形式简介、场论初步、含参变量积分、Fourier 级数等。

本教材可作为数学类专业数学分析课程的教材或教学参考书，还可供科技工作者参考。

# 总 序

自数学出现以来,世界上不同国家、地区的人们在生产实践中、在思考探索中以不同的节奏推动着数学的不断突破和飞跃,并使之成为一门系统的学科。尤其是进入 21 世纪之后,数学发展的速度、规模、抽象程度及其应用的广泛和深入都远远超过了以往任何时期。数学的发展不仅是在理论知识方面的增加和扩大,更是思维能力的转变和升级,数学深刻地改变了人类认识和改造世界的方式。对于新时代的数学研究和教育工作者而言,有责任将这些知识和能力的发展与革新及时体现到课程和教材改革等工作当中。

数学“101 计划”核心教材是我国高等教育领域数学教材的大型编写工程。作为教育部基础学科系列“101 计划”的一部分,数学“101 计划”旨在通过深化课程、教材改革,探索培养具有国际视野的数学拔尖创新人才,教材的编写是其中一项重要工作。教材是学生理解和掌握数学的主要载体,教材质量的高低对数学教育的变革与发展意义重大。优秀的数学教材可以为青年学生打下坚实的数学基础,培养他们的逻辑思维能力和解决问题的能力,激发他们进一步探索数学的兴趣和热情。为此,数学“101 计划”工作组统筹协调来自国内 16 所一流高校的师资力量,全面梳理知识点,强化协同创新,陆续编写完成符合数学学科“教与学”特点,体现学术前沿,具备中国特色的高质量核心教材。此次核心教材的编写者均为具有丰富教学成果和教材编写经验的数学家,他们当中很多人不仅有国际视野,还在各自的研究领域作出杰出的工作成果。在教材的内容方面,几乎是包括了分析学、代数学、几何学、微分方程、概率论、现代分析、数论基础、代数几何基础、拓扑学、微分几何、应用数学基础、统计学基础等现代数学的全部分支方向。考虑到不同层次的学生需要,编写组对个别教材设置了不同难度的版本。同时,还及时结合现代科技的最新动向,特别组织编写《人工智能的数学基础》等相关教材。

数学“101 计划”核心教材得以顺利完成离不开所有参与教材编写和审订的专家、学者及编辑人员的辛勤付出,在此深表感谢。希望读者们能通过数学“101 计划”核心教材更好地构建扎实的数学知识基础,锻炼数学思维能力,深化对数

学的理解,进一步生发出自主学习探究的能力。期盼广大青年学生受益于这套核心教材,有更多的拔尖创新人才脱颖而出!

田 刚

数学“101 计划”工作组组长

中国科学院院士

北京大学讲席教授

# 前言

数学分析是高等学校数学类专业本科阶段最重要的基础课之一，它以微积分为核心内容，历经三百余年众多数学大师们的精心打造，理论基础日趋严谨，知识构架更加宏大，与其他学科的交叉不断深入，影响和应用愈加深远，其强大的生命力也越发彰显。基于课程的上述特点和地位，当教育部在 2023 年启动数学领域本科教育教学改革试点工作即“101 计划”时，数学分析教材的撰写被列为核心教材建设项目，本套教材正是在此背景下诞生的。

根据教育部关于“101 计划”教材的指导精神，即从课程的基本规律和基础要素出发，借鉴国内外的先进资源和经验，以 26 所数学类基础学科拔尖学生培养基地建设高校为主，以培养高校尖子人才为目标，本书定位于为基础较好的优秀大学生提供一套完整的数学分析教材，主要面向部分试点高校数学类基础学科的拔尖班、实验班等群体，同时也期望能为各高校广大的数学分析任课教师提供一套有益的参考书。

微积分的发展大致经过了三个阶段：第一个阶段是从公元前 3 世纪以 Archimedes 为代表的微积分的萌芽状态到 17 世纪后半叶 Newton 和 Leibniz 将微积分发展为独立的学科，彼时的微积分重在解决天文、力学、工程等方面的实际问题。在之后的一二百年间，第一个阶段微积分发展过程中的概念的含糊性和理论基础的欠缺性渐渐显露，使得微积分陷入了深重的危机之中，这一现象直到 19 世纪 Cauchy, Riemann, Liouville 和 Weierstrass 等众多数学家在极限理论等严谨性方面奠基性的工作，才对微积分的定义、概念和定理给出严谨和精准的描述，才力挽数学大厦之危难于不倒，这是微积分发展的第二个阶段。微积分发展的第三个阶段大致始于 19 世纪末，随着问题研究的进一步深化，各种深层次的问题层出不穷，尤其一些悖论的出现，再度引起数学根基的动摇，人们发现，严格性与精确性其实只解决了逻辑推理本身这个基础问题，而逻辑推理所依存的理论基础才是更根本也更难解决的问题，甚至人们连实数系也并不完全了解。这一时期的混乱最终得益于 Dedekind, Cantor, Lebesgue 等数学家对实数理论、集合论等基础性问题的厘清，微积分创建的过程才算得以终结。在同一时期，Grassmann, Poincaré 和 Cartan 等人又发展了外微分形式的语言，并利用外微分形式的语言

把微分和积分这一对矛盾统一在 Stokes 积分公式中,这就使得 Newton 和 Leibniz 的微积分基本公式达到了一个统一的新的 height,微积分也渐渐融入现代分析的洪流。

下面对本套教材主要内容和特点作一简要介绍。由于数学分析是非常成熟的一门基础课程,市面上也有大量的数学分析教材,因此我们只着重介绍和大多数传统教材有较大区别的地方。

教材前两章属于数学分析内容的立足之本。第一章介绍了数学中两个最基本的概念:集合与映射,着重复习了数学中的底层逻辑语言和相关概念与性质。第二章详细讨论了实数系的构造及其基本性质,实数系是数学分析研究对象所处的底层空间,其重要性不言而喻。这部分内容对于初学者而言既是重点也是难点。

第三章和第四章旨在打造分析学的最基本工具之一:极限。具体来说,第三章是关于数列极限的讨论,这里汇集了所谓的实数完备性的几个等价的大定理、它们的证明以及应用。第四章是与数列极限平行的内容,即函数的极限。

在引入了微积分研究对象所处的基本舞台—— $\mathbb{R}$  和所用的基本工具——极限后,数学分析的角色——函数,在第五章登场。在本章,我们主要讨论了函数的连续性。紧随函数的连续性讨论,第六、七两章讨论了函数的微分及其应用。我们详细讨论了经典导数定义的本质定位,从而由此可以给出多种导数定义的自然推广。在应用部分,我们介绍了几个理论上非常重要的微分中值定理。

第八章的不定积分是由微分转向积分的过渡章节,本章的特点之一是在没有引入定积分的定义前,给出了连续函数必有原函数的直接证明。另外,这一章有若干道关于不定积分较为新颖的习题。

从第九章开始,我们转向了本套教材的第二册,即中册。除了第十四和第十五章是关于多元函数的内容外,其余章节全部是围绕着研究对象的“求和”展开的。当求和对象为函数时,对应的求和表现为定积分;当求和对象为数列或者函数列时,表现为数项级数或函数项级数。函数项级数的一种特殊情况就是幂级数,对幂级数的深入讨论放到了第十三章。

第九章中的 Riemann 积分是一元分析的一个重点和难点。我们首先从 Riemann 积分的定义出发,分别介绍由 Riemann, Darboux, Lebesgue 等人所发展的可积性理论,其中引入了零测集的概念以刻画可积函数;其次证明了将微分和积分联系在一起的核心结果——Newton-Leibniz 公式,并介绍了计算定积分的基本方法,同时还给出了 Wallis 公式和 Taylor 公式的积分余项;接下来介绍了可积函数的阶梯逼近和分段线性逼近的技巧并由此证明了推广的分部积分公式和积分第二中值定理;之后我们简要介绍了积分近似计算的矩形公式、梯形公式和 Simpson 公式及其误差估计;最后介绍了定积分在若干几何问题和物理问题中的应用。

第十章讨论一元函数定积分的推广。Riemann 框架下的经典的定积分理论，主要讨论的是有界闭区间上定义的有界函数的积分，当闭区间的有界性和函数的有界性二者之一遭到破坏时，我们面对的将是广义积分。我们首先引入了无界函数的瑕积分和无界区间上的无穷限积分等概念，其次介绍了判断广义积分收敛性的常用方法，最后具体计算了几个常见的广义积分。

第十一、十二和十三章是关于无穷级数理论的。这是分析学的经典内容。其中，关于数项级数我们突出了若干个经典的判别法，特别对于比较判别法，突出了取什么样的级数作为“被比较”对象的典范的基本思想。我们还探讨和推广了经典的交错级数的 Leibniz 判别法、级数与积分的敛散性之间的关系、两个收敛级数之间的代数运算等内容。在函数项级数章节，我们深入讨论了在可列无穷个函数相加时通项函数性质到和函数性质的传承性的一般性理念和根本性思想，以及一致收敛的本质作用。我们还讨论了 Baire 定理、Dini 定理、Arzelà 控制收敛定理等几个深刻的经典结论。在幂级数一章，除了大多数教材上通常包含的内容外，我们还深入讨论了函数的 Taylor 展开，以及 Bernstein 定理、收敛幂级数之间的代数运算、Tauber 定理、小  $o$  Tauber 定理、Abel 定理、Cesàro 可和与 Abel 可和之间的关系等内容。在幂级数一章的最后，我们证明了闭区间上连续函数的多项式一致逼近的 Weierstrass 定理，给出了 Peano 曲线的构造等内容。

第十四章讨论欧氏空间以及多元函数的极限和连续性等基本性质，为后续的多元函数的微分学和积分学理论提供必要的预备知识。我们首先引入了内积、范数等基本概念，并讨论了外积运算在高维空间中的推广形式；其次引入了开集、闭集等拓扑学基本概念，并证明了与实数理论相对应的几个基本结果，给出了重要的压缩映射原理；接下来介绍了多元函数和向量值函数的极限和连续性等概念并用开集和闭集刻画了连续性，研究了连续函数的介值定理和最值定理等整体性质；最后我们简要介绍了欧氏空间上的 Lipschitz 映射和零测集，这主要是为多元函数的可积性理论以及积分变量替换公式的证明做准备的。

第十五章是多元函数的微分学。在这一章，我们特别分析了二阶混合偏导数不具有交换性的一个著名的经典例子，指出如果用极坐标的角度去看这个函数，我们不但能构造出大量的这样“神奇”的函数，而且能更深刻理解其中的原因。围绕这个例子，我们还指出了二阶混合偏导数可以交换的 Young 定理和 Schwarz 定理。值得注意的是这一章对于线性代数的要求较高，读者应当具备线性映射、线性变换的基础知识。究其原因是因为微分学的基本手法无非是作线性化，线性代数的语言很自然地要用上。比如，在这一章里，无论是拟微分中值定理，还是逆映射定理、隐映射定理，甚至是 Lagrange 乘数法，它们的严格表述和证明都是用线性代数的语言完成的，其中 Jacobi 矩阵起了突出的作用。在本章我们还较为详细地讨论了多元微分学的若干应用。

从下册,即第三册开始,我们转向了多元函数的 Riemann 积分,即重积分。第十六章讨论多元函数的积分学。我们首先给出了矩形区域上的二元函数积分的定义,并将一元函数的可积性理论推广到了二元函数;其次给出了  $n$  维矩形区域上的多元函数的重积分的定义,推广了可积性理论,引入了 Jordan 可测集的概念并将矩形区域上的积分推广到了 Jordan 可测集上;接下来介绍了多元函数的重积分化为累次积分的计算方法以及变量替换方法,我们还给出了变量替换公式的完整证明;最后简要讨论了重积分的进一步推广以及简单的物理应用。

第十七章讨论欧氏空间中曲线以及曲面上的积分理论,包括曲线的长度、曲面的面积以及曲线和曲面上函数或向量值函数的积分,这些积分往往有着明显的几何或物理背景。

第十八章讨论曲线积分、曲面积分以及重积分之间的联系,得到了 Newton-Leibniz 公式在欧氏空间中的几种推广形式,包括 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式,它们也可以统一表述为散度定理的形式。为了统一描述这些公式,我们还引入微分形式这一新的研究对象并证明了重要的 Brouwer 不动点定理。

第十九章讨论了场论的若干基本结果。我们首先引进了梯度场和保守场的概念并给出了保守场的刻画;其次给出了散度、Laplace 算子和调和函数的定义,证明了调和函数的平均值公式以及 Liouville 定理,利用微分形式还给出了曲线坐标系中散度的计算公式;最后我们介绍了旋度场并给出了曲线正交坐标系中旋度场的计算公式。

第二十章讨论了含参变量积分,给出了 Arzelà 有界收敛定理和 Arzelà 控制收敛定理的证明,系统讨论了含参变量积分以及含参变量广义积分下的连续性、可微性和可积性。特别地,我们还讨论了 Gamma 函数以及 Beta 函数, Stirling 公式、Euler 公式和 Euler 余元公式的推导和证明,以及 Bohr-Mollerup 定理。

本书的最后一章即第二十一章是关于 Fourier 级数理论的讨论。Fourier 级数是数学分析中极为重要的一部分内容,有着广泛和深刻的影响。在本章中,我们讨论了较为丰富的内容,有些内容对于初学者有一定的难度。这里我们给出了 Fourier 级数的敛散性讨论, Cesàro 求和意义下的收敛, Weierstrass 第二逼近定理,以及 Fejér 积分,讨论了 Fourier 级数的逐项可积、可微和连续性,我们还介绍了 Gibbs 现象,研究了 Fourier 变换以及 Fourier 变换的卷积、逆变换和 Plancherel 定理,并讨论了 Fourier 分析在热传导等问题上的几个重要应用。本章的最后一节给出了 Fourier 级数的唯一性的深入讨论。

完全讲授本教材的全部内容大约需要三个学期的教学量,其中每周需要 4 个学时的主课,配以 2 个学时的习题课。对于部分有困难的学校,可以按照章节内容的特点,做适当的删减。同时,部分习题可能也有一定的难度。

本教材在内容的编排和处理上试图展现微积分上述各阶段的重要理论和思

想方法,以及与此有关的适度外延,对这些问题的分析和讨论,既可以用朴素的观点展望现代分析的思想方法、观点和内容,又可以为后续课程提供大量的素材,有助于读者化解更高深课程的抽象性和艰涩性。

本教材采用的教学内容安排是一种新的尝试,目前还很不成熟。这样的编排次序也迫使我们在一些问题的处理方法上采用了与通常教材不同的手法。

教材较早地引入了一些重要的分析思想,较早地让学生面对了一些问题,因此不是那么遵循循序渐进的教学思想。这可能给部分学生带来一些学习上的困难,但也为学生熟悉运用那些重要的分析思想提供了更多的练习机会,并帮助学生减少一些习惯性的错误认知。

另一方面,对于定理和例题中的推导证明,在大多数情况下,教材尽量采用了“直接”的证明,尤其是接近于“从定义出发”的证明,尽量介绍“常规”的证明思路。我们认为这对于培养学生的基本功是非常重要的。自然,这也可能带来一些副作用。

本教材能较好地对接后继课程的教学,其特点之一是不仅保留了课程传统的教学内容和经典章节,还增加了一些拓展内容以供教师选讲或学生自学。在选材和处理手法上、考虑问题的角度上充分注意到数学内在的统一性,使之在思想、体系、理论和方法等方面能够更自然地对接后续课程。

总体而言,本教材的基本内容仍然属于经典的微积分范畴。在取材方面我们着重理论基础和结构的完整,然而限于编者的水平,如有处理得不恰当的地方还请专家和读者予以批评指正。

编者

2024年11月

# 目 录

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 第一章 集合与映射                 | 1  |
| 1.1 集合                    | 2  |
| 1.1.1 集合论简介               | 2  |
| 1.1.2 第三次数学危机             |    |
| 集合论公理体系简介                 | 3  |
| 1.2 集合的运算                 | 6  |
| 1.3 关系与映射                 | 7  |
| 1.4 集合的势                  | 9  |
| 第二章 实数                    | 19 |
| 2.1 自然数公理                 | 20 |
| 2.2 实数系公理                 | 22 |
| 2.2.1 实数系公理               | 22 |
| 2.2.2 实数的基本性质             | 23 |
| 2.2.3 复数域                 | 25 |
| 2.2.4 广义实数系               | 26 |
| 2.2.5 单调函数与周期函数           | 27 |
| 2.3 实数系的构造                | 27 |
| 2.4 实数系一些概念的回顾            | 35 |
| 第三章 序列极限                  | 43 |
| 3.1 数列极限                  | 44 |
| 3.2 无穷大量 无穷小量 Stolz 公式    | 53 |
| 3.3 实数系基本定理               | 61 |
| 3.3.1 单调收敛定理              | 61 |
| 3.3.2 $e$ 的定义             | 63 |
| 3.3.3 闭区间套定理              | 65 |
| 3.3.4 $\mathbb{R}$ 中的基本概念 | 66 |
| 3.3.5 致密性定理与聚点原则          | 68 |

|       |                             |     |
|-------|-----------------------------|-----|
| 3.3.6 | Cauchy 收敛准则                 | 71  |
| 3.3.7 | 有限覆盖定理                      | 73  |
| 3.3.8 | 基本定理的新舞台                    | 74  |
| 3.4   | 上、下极限                       | 79  |
| 第四章   | 函数极限                        | 87  |
| 4.1   | 函数极限                        | 88  |
| 4.2   | 基本定理与函数极限                   | 92  |
| 4.3   | 几个基础性的函数极限                  | 93  |
| 第五章   | 连续函数                        | 97  |
| 5.1   | 连续函数                        | 98  |
| 5.2   | 基本初等函数的连续性                  | 101 |
| 5.2.1 | 连续函数和、差、积、商的连续性             | 101 |
| 5.2.2 | 复合函数的连续性                    | 102 |
| 5.2.3 | 反函数的连续性                     | 102 |
| 5.2.4 | 基本初等函数的连续性                  | 103 |
| 5.2.5 | 几个常用的重要极限                   | 105 |
| 5.3   | 连续函数的基本性质                   | 107 |
| 5.3.1 | 介值定理                        | 107 |
| 5.3.2 | 最值性与有界性                     | 108 |
| 5.3.3 | 一致连续性                       | 108 |
| 5.3.4 | 摄动法                         | 111 |
| 5.4   | Lipschitz 连续、Hölder 连续和单调函数 | 112 |
| 5.5   | 指数函数、对数函数和三角函数的定义           | 116 |
| 5.5.1 | 复指数函数                       | 116 |
| 5.5.2 | 自然指数函数与自然对数函数               | 118 |
| 5.5.3 | 一般的指数函数与对数函数                | 118 |
| 5.5.4 | 三角函数                        | 119 |
| 5.5.5 | 圆周率                         | 122 |
| 5.5.6 | 夹角 正弦定理 余弦定理                | 124 |
| 第六章   | 导数与微分                       | 127 |
| 6.1   | 导数的引入与定义                    | 128 |
| 6.2   | 单侧导数 Dini 导数 更多的导数          | 137 |
| 6.2.1 | 单侧导数                        | 137 |
| 6.2.2 | Dini 导数                     | 139 |
| 6.2.3 | 对称导数 Schwarz 型导数            | 140 |

|       |                               |     |
|-------|-------------------------------|-----|
| 6.3   | 导数的计算 求导法则                    | 144 |
| 6.3.1 | 一些基本初等函数的导数                   | 144 |
| 6.3.2 | 求导法则 更多函数的导数                  | 145 |
| 6.4   | 函数的微分                         | 161 |
| 6.4.1 | 微分的定义 可导与可微的关系                | 161 |
| 6.4.2 | 微分法则                          | 166 |
| 6.4.3 | 一阶微分的形式不变性                    | 167 |
| 6.5   | 高阶导数                          | 169 |
| 6.5.1 | 高阶导数的定义                       | 169 |
| 6.5.2 | 高阶导数的求导法则                     | 173 |
| 6.5.3 | 高阶微分                          | 176 |
| 第七章   | 微分中值定理                        | 181 |
| 7.1   | 微分中值定理                        | 183 |
| 7.1.1 | Fermat 引理                     | 183 |
| 7.1.2 | Rolle 中值定理                    | 184 |
| 7.1.3 | Lagrange 中值定理                 | 185 |
| 7.1.4 | Cauchy 中值定理                   | 187 |
| 7.1.5 | Darboux 介值定理                  | 188 |
| 7.2   | L'Hôpital 法则                  | 193 |
| 7.2.1 | $\frac{0}{0}$ 型极限             | 194 |
| 7.2.2 | $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限   | 197 |
| 7.3   | Taylor 展开式                    | 203 |
| 7.3.1 | 带 Peano 型余项的 Taylor 展开式       | 203 |
| 7.3.2 | 带 Lagrange 型余项的 Taylor<br>展开式 | 208 |
| 7.4   | Lagrange 插值多项式                | 212 |
| 7.5   | 利用导数研究函数                      | 216 |
| 7.5.1 | 极值与最值                         | 216 |
| 7.5.2 | 单调性                           | 222 |
| 7.5.3 | 凹凸性                           | 225 |
| 7.5.4 | 函数的拐点与渐近线                     | 236 |
| 7.5.5 | 函数作图                          | 238 |
| 第八章   | 不定积分                          | 243 |
| 8.1   | 原函数与不定积分                      | 244 |

|       |                       |     |
|-------|-----------------------|-----|
| 8.2   | 原函数的存在性               | 247 |
| 8.3   | 不定积分的性质与计算            | 250 |
| 8.3.1 | 积出来和积不出来              | 250 |
| 8.3.2 | 不定积分的基本性质             | 253 |
| 8.3.3 | 不定积分的运算法则之一:<br>分部积分法 | 254 |
| 8.3.4 | 不定积分的运算法则之二:<br>换元积分法 | 256 |
| 8.4   | 几类能积出来的初等函数的不定积分      | 259 |
| 8.4.1 | 有理函数的不定积分             | 259 |
| 8.4.2 | 几类可有理化函数的不定积分         | 263 |
|       | 参考文献                  | 270 |
|       | 常用符号                  | 274 |
|       | 索引                    | 277 |