

基础学科拔尖学生培养计划配套教材
—— 数学专业系列

数学分析

(上册)

复旦大学数学科学学院

楼红卫 编著

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社

基础学科拔尖学生培养计划配套教材
——数学专业系列

数学分析

(上册)

复旦大学数学科学学院

楼红卫 编著

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上册 / 楼红卫编著. -- 北京: 高等教育出版社, 2022.8
ISBN 978-7-04-058873-6

I. ①数… II. ①楼… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第106040号

SHUXUE FENXI

项目策划	李蕊 兰莹莹	出版发行	高等教育出版社
策划编辑	高旭	社址	北京市西城区德外大街4号
责任编辑	高旭	邮政编码	100120
封面设计	王凌波	购书热线	010-58581118
版式设计	王凌波	咨询电话	400-810-0598
责任绘图	邓超	网 址	http://www.hep.edu.cn
责任校对	高歌		http://www.hep.com.cn
责任印制	赵义民	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
			http://www.hepmall.com
			http://www.hepmall.cn

印 刷	三河市春园印刷有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	23.25
字 数	400千字
版 次	2022年8月第1版
印 次	2022年8月第1次印刷
定 价	53.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,
请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物 料 号 58873-00

内容提要

本教材根据数学分析课程教学中出现的一些新的需求而编写。全书共十二章，主要内容包含实数、序列极限、函数极限与连续、导数与微分、不定积分、微分中值定理和 Taylor 展开式、微分问题、积分、函数列与函数项级数、反常积分与含参变量积分、曲线积分与曲面积分、Fourier 级数等。

教材较详细地介绍了实数理论，以一元和多元统一的方法引入了函数的极限、导数和积分。在积分理论方面，引入了 Lebesgue 积分理论并以此为基础展开后续内容的讨论。Lebesgue 积分的引入使得教材能够更深入地讨论一些问题，比如含参变量积分的性质，对变分法基本思想和 Fourier 变换基本性质的介绍也得以顺利进行。教材在内容的编排和取舍上，注重了全书的自治性以及数学各分支的联系。例如，给出了各基本初等函数的严格定义，按 Hausdorff 测度讨论了曲面面积的定义和计算公式等。为加强数学分析课程与其他数学课程间的联系，同时也为了把数学分析课程中的一些问题讨论得更深入更清楚，教材介绍了高等代数、常微分方程、复变函数、实变函数和泛函分析等课程中的一些简单而重要的定理，作为数学分析知识的应用。其中包括 Young 不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式，摄动法，卷积，Arzelà-Ascoli 定理，凸集分离定理等。

本教材经适当删减后可作为数学类专业、特别是数学学科拔尖人才培养的数学分析课程教材或参考书，也可直接作为拓展性较强的数学分析课程教材。

前言

数学分析是大学数学类专业的一门主要基础课。本教材尝试为优秀的大学生提供在一年内完成数学分析课程的一种教学方案,为后继课程的教学预留调整空间。为此,我们对数学分析的内容进行了重新编排,其间,不仅保留了课程传统的教学内容,还增加了一些拓展内容以供教师选讲或学生自学。在选题上也注意加强与后继课程的联系。为使教材的架构明晰,我们把不影响课程进程而篇幅又相对较长的内容汇入了各章的附录。

面向数学基础较强的学生,讲授本教材的主要内容大约需要 160 学时,同时辅以约 64 学时的习题课。若配以主课 192 学时,习题课 96 学时,则本教材亦可作为数学基础一般的学生的数学分析教材。课程内容的重新编排,使得针对数学基础较强的学生在一学年内讲授完数学分析成为可能。具体地,在主课 160 学时,习题课 64 学时的条件下,可以通过删减以下章节完成本课程的教学:删减第一章,直接以上确界存在定理作为原理;删减第四章第 4 节;删减第五章第 5 节;删减第六章第 3 节一半内容;删减第六章第 4 节;删减第七章第 3 节;删减第八章第 7 节,第 8 节,第 9 节;删减第九章第 3 节和第 4 节部分内容;删减第九章第 5 节;删减第十章第 4 节一半内容;删减第十章第 5 节;删减第十一章第 6 节,第 7 节;删减第十二章第 3 节一半内容;删减第十二章第 4 节。

我们期望本教材能为培养优秀学生提供有效的帮助,也期望它能为任课教师提供有益的参考。在具体的写作手法上,一方面,我们遵循了使本书能作为教材使用的一些基本规范。另一方面,也兼顾了使本书能成为一本方便查阅的数学分析教学参考书。因此,在一些点上可能着墨过多,而在有些点上,既给出了较为一般化而略显烦琐的结论,

又给出了特殊而简明的结论。对此,教师在教学中可根据实际情况加以取舍。

本教材的内容安排是一种新的尝试,目前还不成熟。这样的编排次序也迫使我们在一些问题的处理方法上采用了与通常教材不同的手法。例如,由于直接讨论多元情形,我们必须直面很多被大多数教材规避的问题,这在丰富读者视角的同时也夹杂了一些不甚成熟的处理方法。同样,直接接触多元,增加了初学的难度,但也减少了高维情形成为学生长期短板的可能性。

教材较早地引入了一些重要的分析思想,较早地让学生面对一些问题,因此不是严格遵循循序渐进的教学思想。这可能给部分学生带来一些学习上的困难,但也为学生熟悉运用那些重要的分析思想提供了更多的练习机会,并帮助学生减少一些习惯性的错误认知。

另一方面,对于定理和例题中的推导证明,在大多数情况下,教材尽量采用了“直接的”证明,尤其是接近“从定义出发”的证明,尽量介绍“常规”的证明思路。我们认为这对于培养学生的基本功是非常重要的。自然,这也可能带来一些副作用。

在初稿的撰写与平时的教学中,我们深感在 Riemann 积分框架下叙述和证明一些重要结果时,会面对很多困扰。在王昆扬和陈杰诚两位教授的建议下,我们尝试在 Lebesgue 积分框架下讲授数学分析。引入 Lebesgue 积分以及证明它的一些基本性质给初学者带来的挑战较大,其中处理集合时的基本思想和方法尤其不易被初学者掌握。使用本教材时,对于其中证明较烦琐或较有技巧的定理,可主要着眼于定理的运用,而暂不要求学生掌握其详细证明。Lebesgue 积分的引入也使我们在编写教材时,必须对后继概念、例题和定理以与 Lebesgue 积分相适应的方式重新定义、组织。在反常积分部分,由于数学分析传统的教学内容中,反常积分的概念是基于 Riemann 积分而引入的,因此在一些概念的定义上不是那么自然地可以适应 Lebesgue 积分,但 Lebesgue 积分让绝对收敛的反常积分的研究变得容易。在含参变量积分、Fourier 级数、Fourier 变换理论等的研究中,Lebesgue 积分所带来的好处也是明显的,很多定理的条件和结论都显得更为自然,并得以在数学分析课程中加以讲解。其中很多重要的内容,通常被假定为留待在数学分析的后继课程中讲解,但事实上它们在后继课程中加

以认真讨论的机会并不多。

本教材在编写过程中得到了许多老师的帮助,试用过程中同学们也提出了不少宝贵的意见。这其中,尤其感谢杨家忠、陈纪修、庞学诚、陈杰诚、梅加强、郇中丹、王昆扬、严金海、王梦、谢纳庆等教授的支持和帮助。教材的习题有相当一部分来自与国内数学分析教师们的交流和各高校的考题,也有部分来自学生在数学分析讨论班上自编的习题,在此深表感谢!

笔者在数学分析的学习和教学中,最受欧阳光中教授和李铭德教授影响,在此谨向两位前辈表达由衷的敬意。

虽然投入了很多时间精力,本教材仍需在今后的教学实践中作进一步修改完善。书稿中存在着许多不足,恳请读者不吝指正。

2022 年 1 月 11 日

目录

绪论 1

第一章 实数 5

§1 集合与映射 7

集合, 关系与映射, Descartes 乘积, 函数, 集合的势, 可数集, 不可数集, 代数数, 超越数, Bernstein 定理

§2 第一次数学危机 22

第一次数学危机, 可公度量, 比例论

§3 实数公理系统 25

自然数公理, 数学归纳法, 实数公理系统, 实数系, 有序域的性质, 三角不等式, Newton 二项展开式, 杨辉三角, 广义实数系, 区间, 单调函数, 复数域, 周期函数

§4 实数系的构造 34

实数系的构造, Dedekind 分割, 稠密性, 上确界存在定理, 有理数, 无理数, 实数的十进制表示, n 次方根, 算术几何平均不等式, 指数函数的定义, 对数函数的定义

§5 附录 47

构造实数系的其他典型方法, 实数系的唯一性, 序同构, 实数系构造的 Cantor 方法

第二章 序列极限 55

§1 数列极限 57

数列极限, 无穷级数, 无穷乘积, 数列极限的性质, 夹逼准则

§2	无穷大量, 无穷小量, Stolz 公式	68
	无穷大量, 无穷小量, 小 o , 大 O , 等价, 同阶, 不定型, Stolz–Cesàro 定理	
§3	Euclid 空间中的基本概念	76
	线性空间, 赋范线性空间, 度量空间, Euclid 距离, 平行 四边形法则, 范数, 内点, 邻域, 外点, 边界点, 聚点, 开 集, 闭集, 闭包, 稠密, 无处稠密集/疏朗集, 内积空间	
§4	Euclid 空间中的基本定理	85
	确界存在定理, 单调收敛定理, 自然对数, 常数 e , 闭区 间套定理, 聚点原则, 致密性定理, 基本列, Cauchy 准 则, 调和级数, 有限覆盖定理, Loewner 偏序, 对角线法, 闭集套定理, 局部, 紧集, 完备性, 列紧集, 相对紧集, 准 紧集, Euler 常数, Lebesgue 数, Lebesgue 覆盖定理	
§5	上、下极限	103
	上极限, 下极限, Stolz 公式的推广	
§6	正项级数	110
	正项级数, 正项级数收敛的基本定理, 比较判别法, Cauchy 判别法, D'Alembert 判别法, Raabe 判别法, 收敛得更慢与发散得更慢的级数	
§7	任意项级数	119
	任意项级数, 绝对收敛, 条件收敛, Abel 变换, Abel 判 别法, Dirichlet 判别法, 交错级数, Leibniz 判别法, 幂级数, 幂级数的收敛半径, Cauchy–Hadamard 公式, Cauchy 乘积, Mertens 定理, 级数的重排, 累级数, 无穷乘积的 收敛性	

第三章 函数极限与连续 131

§1	函数极限	133
	函数极限, 单侧极限, 函数极限的基本性质, Heine 定理, 基本定理的对应结果, 重要数列极限的对应结果, 关于 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	

§2 连续函数 143

连续函数, 左连续, 右连续, 连续函数的四则运算, 复合函数的连续性, 基本初等函数的连续性, 反函数的连续性, 紧集上逆映射的连续性, 间断点, 一些重要的极限, e^x 的无穷级数表示

§3 连续函数的基本性质 152

道路, 连通集, 区域, 拓扑学视角下的连续性, 相对开集, 相对闭集, 介值定理, 最值定理, 连续函数的有界性, 一致连续性, $\mathbb{R}^n$ 中范数的等价性, 代数基本定理, 不动点, 压缩映射原理, 摄动法, 利用极限定义指数函数和对数函数

§4 方向极限与累次极限 164

曲线, 方向极限, 沿曲线的极限, 累次极限, 多重极限

第四章 导数与微分 169

§1 导数与微分 171

导数的几何物理背景, 一元向量值函数的导数, 左导数, 右导数, 导数与单调性, 方向导数与偏导数, 全导数, 微分, 线性变换/线性算子, 微商, 梯度, 导数的四则运算

§2 反函数、复合函数和隐函数的导数 182

一元实函数反函数的可导性及求导公式, 复合函数的导数, 链式法则, 一阶微分形式的不变性, 隐函数求导, 基本初等函数的导数, 对数求导法

§3 高阶导数 191

高阶导数, Leibniz 公式, 微分算子 D , C^k , $C^{k,\alpha}$ 函数类, 光滑函数, Hölder 条件, Lipschitz 条件, 多重指标, 多重零点

§4 复指数函数、正弦函数和余弦函数 199

用级数定义复指数函数, 用微分方程定义正弦和余弦函数, Euler 公式

第五章 不定积分 207

§1 不定积分 209

原函数, 不定积分, 恰当方程

§2 变量代换法 214

第一类变量代换, 第二类变量代换, 万能代换

§3 分部积分法 220

§4 有理函数不定积分 224

有理函数, 最简分式

§5 求解简单的常微分方程 230

常微分方程, 特解, 通解, 分离变量法, 初值问题, 解的最大存在区间, 一阶线性方程, 常数变易法, 积分因子法, 全微分方程, 齐次方程, Bernoulli 方程

第六章 微分中值定理和 Taylor 展开式 237

§1 微分中值定理 239

Fermat 引理, Rolle 中值定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理, 微分 Darboux 定理, 凸集, 常微分方程初值问题解的唯一性

§2 L'Hôpital 法则 249

L'Hôpital 法则及其推广, 极限计算中的化简——“去核”与“去皮”

§3 凸函数 258

凸(凹)函数, Jensen 不等式, 割线斜率与凸性, 凸性与连续性, 中点凸(凹)函数, 凸性与一阶导数, 支撑线(面), 凸性与二阶导数, Hesse 矩阵, 对偶数, Young 不等式, 离散 Hölder 不等式, 离散 Minkowski 不等式, 幂平均不等式, 调和平均

§4 微分 Darboux 定理与比较定理 276

微分不等式, 常微分方程比较定理, 偏微分方程比较定理

§5 Taylor 多项式与插值多项式 283

Taylor 多项式, 带 Peano 型余项的 Taylor 公式, Maclaurin 展开式, Taylor 展开式的唯一性, 带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式, Lagrange 型插值多项式, 线性方程组解的线性可加性, Runge 现象, 插值多项式的误差估计, 插值多项式, 插值函数, 函数拟合, 广义中值定理

§6 Taylor 展开式的计算及应用 303

Taylor 展开式计算的直接方法和间接方法, 利用 Taylor 展开式计算反函数的高阶导数, 利用 Taylor 展开式计算隐函数的高阶导数, Landau 不等式, Taylor 展开式在组合问题上的应用

第七章 微分问题 317

§1 隐函数存在定理 319

隐函数存在定理, 曲面的切平面, 法向量

§2 极值问题 326

强制条件, 极值问题, 无条件极值, 一阶必要条件, 驻点, 二阶必要条件, 最小二乘法, 线性拟合, 条件极值, Lagrange 乘子法, 矩阵的诱导范数

§3 常系数线性微分方程 336

一阶常系数线性微分方程组, 矩阵指数函数, 高阶常系数线性微分方程, 特征方程, 算子法

§4 导数的其他应用 347

Newton 切线法, 平方收敛, 平面曲线的曲率与曲率半径, 一元实函数的草图, 拐点

参考文献 353

索引 353