

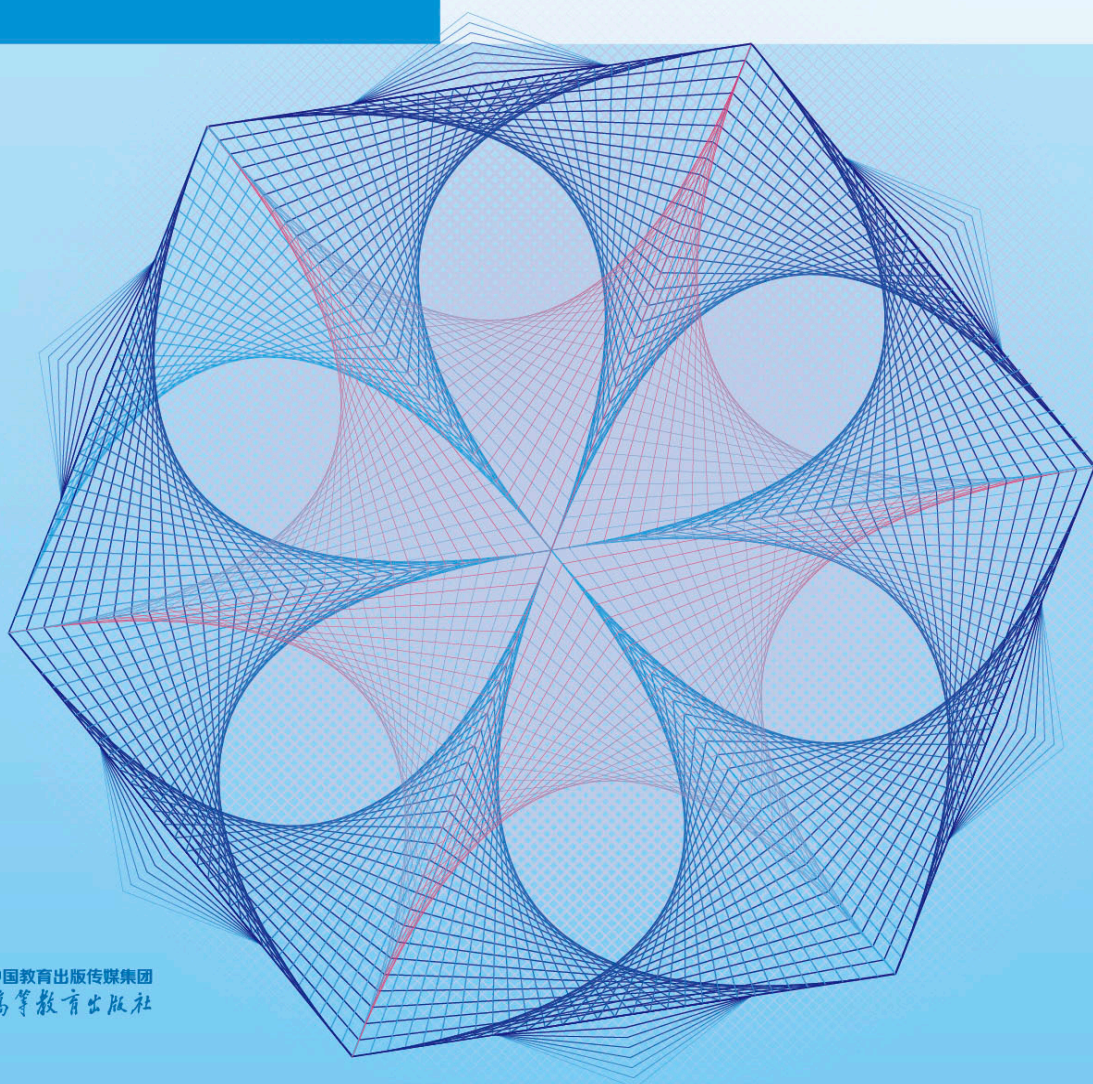
基础学科拔尖学生培养计划配套教材
—— 数学专业系列

数学分析

(下册)

复旦大学数学科学学院

楼红卫 编著



中国教育出版传媒集团
高等教育出版社

基础学科拔尖学生培养计划配套教材
——数学专业系列

复旦大学数学科学学院
楼红卫 编著

数学分析

(下册)

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册 / 楼红卫编著. -- 北京: 高等教育出版社, 2023. 3
ISBN 978-7-04-059967-1

I. ①数… II. ①楼… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第029853号

SHUXUE FENXI

项目策划 李蕊 兰莹莹
策划编辑 高旭
责任编辑 高旭
封面设计 王凌波
版式设计 王凌波
责任绘图 邓超
责任校对 胡美萍
责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>

印 刷 三河市春园印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 26
字 数 460千字
版 次 2023年3月第1版
印 次 2023年3月第1次印刷
定 价 59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,
请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物 料 号 59967-00

内容提要

本教材根据数学分析课程教学中出现的一些新的需求而编写。全书共十二章，主要内容包含实数、序列极限、函数极限与连续、导数与微分、不定积分、微分中值定理和 Taylor 展开式、微分问题、积分、函数列与函数项级数、反常积分与含参变量积分、曲线积分与曲面积分、Fourier 级数等。

教材较详细地介绍了实数理论，以一元和多元统一的方法引入了函数的极限、导数和积分。在积分理论方面，引入了 Lebesgue 积分理论并以此为基础展开后续内容的讨论。Lebesgue 积分的引入使得教材能够更深入地讨论一些问题，比如含参变量积分的性质，对变分法基本思想和 Fourier 变换基本性质的介绍也得以顺利进行。教材在内容的编排和取舍上，注重了全书的自洽性以及数学各分支的联系。例如，给出了各基本初等函数的严格定义，按 Hausdorff 测度讨论了曲面面积的定义和计算公式等。为加强数学分析课程与其他数学课程间的联系，同时也为了把数学分析课程中的一些问题讨论得更深入更清楚，教材介绍了高等代数、常微分方程、复变函数、实变函数和泛函分析等课程中的一些简单而重要的定理，作为数学分析知识的应用。其中包括 Young 不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式，摄动法，卷积，Arzelà-Ascoli 定理，凸集分离定理等。

本教材经适当删减后可作为数学类专业、特别是数学学科拔尖人才培养的数学分析课程教材或参考书，也可直接作为拓展性较强的数学分析课程教材。

前言

数学分析是大学数学类专业的一门主要基础课。本教材尝试为优秀的大学生提供在一年内完成数学分析课程的一种教学方案,为后继课程的教学预留调整空间。为此,我们对数学分析的内容进行了重新编排,其间,不仅保留了课程传统的教学内容,还增加了一些拓展内容以供教师选讲或学生自学。在选题上也注意加强与后继课程的联系。为使教材的架构明晰,我们把不影响课程进程而篇幅又相对较长的内容汇入了各章的附录。

面向数学基础较强的学生,讲授本教材的主要内容大约需要 160 学时,同时辅以约 64 学时的习题课。若配以主课 192 学时,习题课 96 学时,则本教材亦可作为数学基础一般的学生的数学分析教材。课程内容的重新编排,使得针对数学基础一般的学生在一学年内讲授完数学分析成为可能。具体地,在主课 160 学时,习题课 64 学时的条件下,可以通过删减以下章节完成本课程的教学:删减第一章,直接以上确界存在定理作为原理;删减第四章第 4 节;删减第五章第 5 节;删减第六章第 3 节一半内容;删减第六章第 4 节;删减第七章第 3 节;删减第八章第 7 节,第 8 节,第 9 节;删减第九章第 3 节和第 4 节部分内容;删减第九章第 5 节;删减第十章第 4 节一半内容;删减第十章第 5 节;删减第十一章第 6 节,第 7 节;删减第十二章第 3 节一半内容;删减第十二章第 4 节。

我们期望本教材能为培养优秀学生提供有效的帮助,也期望它能为任课教师提供有益的参考。在具体的写作手法上,一方面,我们遵循了使本书能作为教材使用的一些基本规范。另一方面,也兼顾了使本书能成为一本方便查阅的数学分析教学参考书。因此,在一些点上可能着墨过多,而在有些点上,既给出了较为一般化而略显烦琐的结论,

又给出了特殊而简明的结论。对此, 教师在教学中可根据实际情况加以取舍。

本教材的内容安排是一种新的尝试, 目前还不成熟。这样的编排次序也迫使我们在一些问题的处理方法上采用了与通常教材不同的手法。例如, 由于直接讨论多元情形, 我们必须直面很多被大多数教材规避的问题, 这在丰富读者视角的同时也夹杂了一些不甚成熟的处理方法。同样, 直接接触多元, 增加了初学的难度, 但也减少了高维情形成为学生长期短板的可能性。

教材较早地引入了一些重要的分析思想, 较早地让学生面对一些问题, 因此不是严格遵循循序渐进的教学思想。这可能给部分学生带来一些学习上的困难, 但也为学生熟悉运用那些重要的分析思想提供了更多的练习机会, 并帮助学生减少一些习惯性的错误认知。

另一方面, 对于定理和例题中的推导证明, 在大多数情况下, 教材尽量采用了“直接的”证明, 尤其是接近“从定义出发”的证明, 尽量介绍“常规”的证明思路。我们认为这对于培养学生的基本功是非常重要的。自然, 这也可能带来一些副作用。

在初稿的撰写与平时的教学中, 我们深感在 Riemann 积分框架下叙述和证明一些重要结果时, 会面对很多困扰。在王昆扬和陈杰诚两位教授的建议下, 我们尝试在 Lebesgue 积分框架下讲授数学分析。引入 Lebesgue 积分以及证明它的一些基本性质给初学者带来的挑战较大, 其中处理集合时的基本思想和方法尤其不易被初学者掌握。使用本教材时, 对于其中证明较烦琐或较有技巧的定理, 可主要着眼于定理的运用, 而暂不要求学生掌握其详细证明。Lebesgue 积分的引入也使我们在编写教材时, 必须对后继概念、例题和定理以与 Lebesgue 积分相适应的方式重新定义、组织。在反常积分部分, 由于数学分析传统的教学内容中, 反常积分的概念是基于 Riemann 积分而引入的, 因此在一些概念的定义上不是那么自然地可以适应 Lebesgue 积分, 但 Lebesgue 积分让绝对收敛的反常积分的研究变得容易。在含参变量积分、Fourier 级数、Fourier 变换理论等的研究中, Lebesgue 积分所带来的好处也是明显的, 很多定理的条件和结论都显得更为自然, 并得以在数学分析课程中加以讲解。其中很多重要的内容, 通常被假定为留待在数学分析的后继课程中讲解, 但事实上它们在后继课程中加

以认真讨论的机会并不多。

本教材在编写过程中得到了许多老师的帮助,试用过程中同学们也提出了不少宝贵的意见。这其中,尤其感谢杨家忠、陈纪修、庞学诚、陈杰诚、梅加强、郇中丹、王昆扬、严金海、王梦、谢纳庆等教授的支持和帮助。教材的习题有相当一部分来自与国内数学分析教师们的交流和各高校的考题,也有部分来自学生在数学分析讨论班上自编的习题,在此深表感谢!

笔者在数学分析的学习和教学中,最受欧阳光中教授和李铭德教授影响,在此谨向两位前辈表达由衷的敬意。

虽然投入了很多时间精力,本教材仍需在今后的教学实践中作进一步修改完善。书稿中存在着许多不足,恳请读者不吝指正。

2022 年 1 月 11 日

常用符号汇编

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$	整数集, 正整数集
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$	有理数域, 正有理数集
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	实数域, 正实数集
$\mathbb{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{C}^n$	n 维复空间
S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, 即 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = 1\}$
$\mathbb{S}^n$	n 阶实对称矩阵全体
$B_r(\mathbf{x})$	半径为 r 中心在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的开球
$\overset{\circ}{B}_r(\mathbf{x})$	半径为 r 中心在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的去心开球
$Q_\delta(\mathbf{x})$	边长为 2δ 中心在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 且各边平行于坐标轴的开正方体
$\mathbf{A}^T, \mathbf{x}^T$	矩阵 $\mathbf{A}$, 向量 $\mathbf{x}$ 的转置
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的数量积, 也常常用 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ 表示
$\langle x, y \rangle$	内积空间中两个元素 x, y 的内积
$\ \mathbf{x}\ _p$	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的 p 范数 $\left(\sum_{k=1}^n x_k ^p \right)^{\frac{1}{p}}$
$\ \mathbf{A}\ _p$	方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的诱导范数 $\ \mathbf{A}\ _p = \max_{\ \mathbf{x}\ _p=1} \ \mathbf{A}\mathbf{x}\ _p$
$ \mathbf{x} $	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{x}$ 通常的范数, 即 $\ \mathbf{x}\ _2$
$\ \mathbf{A}\ $	方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 通常的诱导范数 $\ \mathbf{A}\ _2$
$ E $	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 Lebesgue 测度 (或 Jordan 测度) —— 长度, 面积, 体积
$ E ^*, E _*$	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 Jordan 外测度, 内测度
m^*E, m_*E	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 Lebesgue 外测度, 内测度
a^+, a^-	实数 a 的正部 $(a + a)/2$ 与负部 $(a - a)/2$
$a \vee b, a \wedge b$	实数 a, b 的最大值和最小值
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	复数 $z \equiv a + bi$ 的实部 a 和虚部 b , 其中 a, b 为实数
χ_E	集合 E 的特征函数, 即在 E 上取值为 1, 在其余点上取值为零的函数
$\exists$	存在
$\forall$	对于任意
$\gg, \ll$	大大大于, 大大小于
a.e.	几乎处处
s.t.	满足或使得

$\emptyset$	空集
$\in, \ni$	$a \in E$ 和 $E \ni a$ 均表示 a 是 E 的元素
$\subseteq, \supseteq$	$E \subseteq F$ 和 $F \supseteq E$ 均表示集合 E 包含于集合 F , 即 F 包含 E
$\subset, \supset$	$E \subset F$ 和 $F \supset E$ 均表示集合 E 真包含于集合 F , 即 F 真包含 E
$E \{ \varphi \in F \}$	表示集合 $\{x \in E \varphi(x) \in F\}$. 在 E 明确的情况下, 简记为 $\{\varphi \in F\}$
$f(D)$	当 f 是映射, D 是集合时, 表示 D 的像集 $\{f(x) x \in D\}$
$\cap$	集合的交, $A \cap B$ 表示同时属于 A 和 B 的所有元素组成的集合
$\cup$	集合的并, $A \cup B$ 表示属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合
$\setminus$	集合的差, $A \setminus B$ 表示属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合
$\complement$	集合的补, $\complement E$ 表示在全集 X 明确的情况下, E 的补集 $X \setminus E$
E°	集合 E 的内部, 即 E 的内点的全体
E'	集合 E 的导集, 即 E 的极限点 (聚点) 的全体
$\overline{E}$	集合 E 的闭包
∂E	集合 E 的边界
$\subset\subset$	集合的紧包含关系, $E \subset\subset F$ 当且仅当 $\overline{E}$ 是 F 的紧子集
$\alpha E + \beta F$	线性空间中, 集合的伸缩, 代数和与代数差等, 表示集合 $\{\alpha x + \beta y x \in E, y \in F\}$
$\sum, \prod$	连加号, 连乘号
$[x], \{x\}$	实数 x 的整数部分 (即不大于 x 的最大整数) 与小数部分 (即 $x - [x]$)
$\overline{\lim}, \lim$	上极限, 下极限
$\bar{\int}, \int$	上积分符号, 下积分符号
C_n^k	在 n 个不同的元素中选取 k 个的组合数
$C^k(\Omega)$	在 Ω 上有 k 阶连续 (偏) 导数的函数全体
$C_c^k(\Omega)$	在 Ω 上有紧支集且有 k 阶连续 (偏) 导数的函数全体
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	在 Ω 上 k 阶 (偏) 导数满足 α 次 Hölder 条件的函数全体
$\mathcal{S}$	速降函数全体
$\hat{f}, \check{f}$	函数 f 的 Fourier 变换, Fourier 逆变换
$f * g$	函数 f 和 g 的卷积

目录

第八章 积分 1

§1 Riemann 积分 4

划分, 轴平行形矩形及其体积, Riemann 积分的定义, Riemann 和, Darboux 上和, Darboux 下和, 加细, 积分 Darboux 定理, 上积分与下积分, 一般有界集上的 Riemann 积分, Jordan 测度, 有界集的体积, Jordan 可测, Riemann 可积的充要条件

§2 Lebesgue 测度与 Lebesgue 可测函数 ... 16

Lebesgue 外测度, Lebesgue 测度, 可测集, Carathéodory 条件, 几乎处处, σ 代数, 上限集, 下限集, 极限集, Borel 集, 二进方体, 不可测集, Lebesgue 可测函数, Borel 可测函数, 简单函数, Carathéodory 函数, 依测度收敛, Egorov 定理, Riesz 定理, Luzin 定理

§3 Lebesgue 积分及其性质 33

Lebesgue 积分, 可积函数空间, 本性上界, 本性下界, 绝对可积性, 绝对连续性, 积分第一中值定理, 平行多面体的体积公式, 连续型 (积分型) Hölder 不等式, 权函数, 积分型 Minkowski 不等式, Lévy 单调收敛定理, Fatou 引理, Lebesgue 控制收敛定理, L^p 空间的完备性

§4 Newton–Leibniz 公式 51

微积分基本定理——Newton–Leibniz 公式, 定积分的分部积分, 定积分的变量代换, 带积分型余项的 Taylor 公式, Wallis 公式, Stirling 公式

§5 累次积分 64

累次积分, Fubini 定理, 积分型 Young 不等式及其推广

§6	重积分变量代换	77
	重积分变量代换, Jacobi 矩阵 (行列式), (广义) 极坐标变换, (广义) 柱面坐标变换, 旋转体的体积, (广义) 球面坐标变换, (广义) 高维球面坐标变换	
§7	函数的光滑逼近	90
	函数的光滑逼近, 支集, 简单函数逼近可积函数, 连续函数逼近可积函数, C^k 函数一致逼近连续函数, 一致收敛, 内闭一致收敛, 卷积, Young 不等式, 磨光算子, Weierstrass 逼近定理, 连续函数的延拓	
§8	光滑逼近的应用	105
	分部积分公式的推广, 带积分型余项 Taylor 公式的推广, 积分第二中值定理, 推广的 Riemann—Lebesgue 引理, 无理数之均匀分布	
§9	附录	118
	Lebesgue 判据, Lebesgue 基本定理, Vitali 型覆盖引理, 绝对连续函数, 对偶问题, 线性算子定义域的延拓, Marcinkiewicz 插值定理, 对数函数的积分定义, 曲线的弧长, 三角函数的积分定义	
第九章 函数列与函数项级数 137		
§1	函数列与函数项级数的一致收敛及其性质	139
	函数列与函数项级数的一致收敛及其性质, Cauchy 准则	
§2	函数项级数一致收敛性的判别法	149
	Weierstrass 判别法, Abel 判别法, Dirichlet 判别法	
§3	幂级数与函数的幂级数展开	154
	幂级数的收敛半径, Abel 第一定理, Cauchy—Hadamard 公式, 幂级数的性质, Abel 第二定理, 函数的幂级数展开, Taylor 级数, Maclaurin 级数, 直接法, 间接法, 幂级数在复数域内的性质, 非切向极限, 实解析函数, 复解析函数, 复区域上函数的复导数, Cauchy—Riemann 条件	

§4 幂级数的应用 172

数项级数的计算, 幂级数与三角级数, Abel 和, Cesàro 和, Tauber 型定理, 母函数, Bernoulli 多项式, Bernoulli 数, 幂级数的抽象应用, Hardy–Littlewood 定理

§5 常微分方程初值问题解的存在性 187

Picard 迭代, 等度连续, Arzelà–Ascoli 定理, 非 Lipschitz 条件下解的存在性, 积分方程的解, 解的延伸

第十章 反常积分与含参变量积分 197

§1 基于 Riemann 积分的反常积分 199

瑕积分, 无穷积分, 反常重积分, 非负函数反常积分的收敛性, Cauchy 准则, 绝对收敛与条件收敛, Abel 判别法, Dirichlet 判别法, 概率积分, Cauchy 主值积分, 数项级数收敛的 Cauchy 积分判别法

§2 含参变量反常积分的一致收敛性及判别法 216

含参变量反常积分的一致收敛性, Cauchy 准则, Weierstrass 判别法, Abel 判别法, Dirichlet 判别法

§3 含参变量积分的性质 221

含参变量积分的极限与连续性, 含参变量积分的可微性, 含参变量积分的积分, 积分的计算

§4 Euler 积分 236

Γ 函数, Γ 函数的递推公式, $\log$ - Γ , Stirling 公式及其改进, Euler 公式, Gauss 叠乘定理, 倍元公式, Bohr–Mollerup 定理, 余元公式, B 函数, B 函数和 Γ 函数的关系, 多重对数函数, 双 Γ 函数, 利用 Euler 积分计算

§5 变分法初步 250

最优解的必要条件, Euler–Lagrange 方程, 特殊情形 Euler–Lagrange 方程的求解, 捷线问题, 最优解的充要条件, 存在性问题简介, Poincaré 不等式, 弱收敛, 强收敛, Clarkson 不等式, 凸集分离定理, Mazur 定理, Riesz 表示定理

第十一章 曲线积分与曲面积分 275

- §1 第一型曲线积分 277
 曲线, Peano 曲线, 简单曲线, 简单闭曲线, 曲线的弧长, 弧长参数, 第一型曲线积分
- §2 第一型曲面积分 289
 曲面, 同胚, k 维 C^m 曲面, Schwarz 的例子, 集合的面积, 分片 C^m 曲面, $\mathbb{R}^n$ 中子集的 k 维体积 (面积), 第一型曲面积分, 余面积公式, 楔积
- §3 第二型曲线积分 302
 第二型曲线积分, 第一、第二型曲线积分的关系, 曲线的方向, Jordan 闭曲线定理
- §4 第二型曲面积分 307
 第二型曲面积分, 第一、第二型曲面积分的关系, 通量, 曲面的侧
- §5 Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式 313
 向量场, 单连通区域, Ostrogradsky—Gauss 定理 (散度定理), Green 公式, Stokes 公式, 曲线积分和路径无关性, 原函数的存在性, 循环常数, 场论初步, 梯度场 (保守场), 散度场, 向量线, 环量, 旋度, 无源场, 无旋场, Hamilton 算子, Laplace 算子, 分部积分公式, Green 第一、第二公式
- §6 调和函数与复解析函数 326
 调和函数, 平均值公式, 最值原理, Poisson 公式, 复可导与复解析的等价性, Cauchy 定理, 最大模原理, Liouville 定理, 共轭函数, 利用解析函数计算
- §7 附录: C^1 曲面的 Hausdorff 测度 342
 Binet—Cauchy 公式, C^1 曲面的 Hausdorff 测度公式

第十二章 Fourier 级数 349

- §1 三角级数, Fourier 级数 351
 三角级数, Fourier 级数, 三角级数的复形式, 偶延拓, 奇延拓, 余弦级数, 正弦级数

§2 Fourier 级数的收敛性 356

Dirichlet 积分, Dirichlet 核, 局部性原理, Dini–Lipschitz 判别法, Dirichlet 引理, Dirichlet–Jordan 判别法, 逐项可积性, 非 Fourier 级数而逐点收敛的三角级数, 一致收敛性, 奇异性, Fejér 积分, Fejér 核, 平方可积函数 Fourier 级数的性质, 标准正交系, 最佳均方逼近, Bessel 不等式, Parseval 等式, p 次可积函数 Fourier 级数的性质

§3 Fourier 变换 374

Fourier 变换, 速降函数 (Schwarz 函数), Fourier 变换的导数, 导数的 Fourier 变换, Fourier 逆变换, 卷积的 Fourier 变换, 乘积的 Fourier 变换, Plancherel 定理, Hausdorff–Young 不等式, 处处连续无处可微函数, 处处连续无处 Hölder 连续函数, 热传导方程的求解, Heisenberg 不确定性原理, $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换, Borwein 积分

§4 Fourier 级数的唯一性 387

Cantor 引理, Riemann 第一定理, Riemann 第二定理, Cantor–Lebesgue 定理, Du Bois-Reymond–de la Vallée–Poussin 定理

参考文献 395

索引 395